das tangentiale und normale Verhalten der Fläche.

<u>Definition</u>: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die <u>Gauß-Abbildung</u> $N : \Omega \to S^2$ <u>von X</u> ist per Definition

$$N := X_u \times X_v \,/\, |X_u \times X_v| .$$

Das <u>Gauß'sche Dreibein</u> ist die positiv orientierte Basis (X_u, X_v, N) von $\mathbb{R}^3$.

<u>Bemerkung</u>: Per Definition ist $|N| \equiv 1$, X_u und X_v haben i.a. Norm $\neq 1$, so dass (X_u, X_v, N) i.a. keine ONB ergibt.

<u>Beispiele</u>: 1.) <u>Graphenflächen</u>

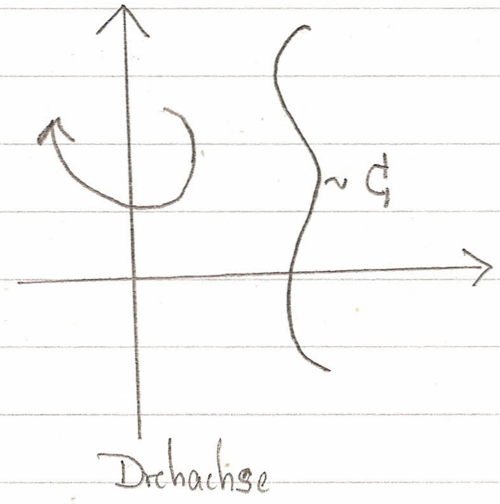
Mit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sei $X : \Omega \ni (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Gemäß $X_u = (1, 0, \partial_u f)$, $X_v = (0, 1, \partial_v f)$ erhalten wir

$$X_u \times X_v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \partial_u f \\ 0 & 1 & \partial_v f \end{pmatrix} =$$

$$-e_1\, \partial_u f - e_2\, \partial_v f + e_3 = (-\nabla f, 1),$$ also

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (-\nabla f, 1)}$$ Gauß-Abbildung für Graphenflächen

2.) Rotationsflächen: Viele Flächen lassen sich dadurch erzeugen, dass man eine Kurve im Raum bewegt. Sei etwa $S \subset \mathbb{R}^3$ die Menge, die man erhält, wenn man eine reguläre ebene Kurve C um eine Achse dieser Ebene dreht, die die Kurve nicht schneidet.



Sei etwa die xz-Ebene die Ebene, in der C liegt, und C schneide die z-Achse nicht. Dann kann man die z-Achse als Rotationsachse nehmen. Es sei

$$\alpha : [a,b] \ni t \mapsto (f(t), 0, g(t)) \in \mathbb{R}^3$$

eine Parametrisierung von C. Setzt man

$$X : (0,2\pi) \times (a,b) \ni (u,v) \mapsto$$

$$(f(v)\cos u, f(v)\sin(u), g(v)),$$

so parametrisiert X offenbar die Fläche S. Man spricht aus naheliegenden Gründen von einer Rotationsfläche. Es gilt

$$X_u = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0)$$

$$X_v = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)),$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ & X_u & \\ & X_v & \end{vmatrix} =$$

$$(f(v)g'(v)\cos u, g'(v)f(v)\sin u, -f'(v)f(v)),$$

$$|X_u \wedge X_v| = |f(v)| \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}.$$

Da C die z-Achse nicht schneidet, nimmt man o.E. an, dass C rechts von der z-Achse liegt, also $f(v)>0$ gilt. Dann ergibt sich für die Gauß-Abbildung

$$N(u,v) = \frac{(g'(v)\cos u, g'(v)\sin u, -f'(v))}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}}.$$

Da wir C als regulär annehmen, ist $\alpha'(t) = (f'(t), g'(t)) \neq 0$, also $N(u,v)$ wohldefiniert.

Zum Abschluss dieses §en diskutieren wir, wie sich die Gaußabbildung N einer Fläche verhält, wenn man diese Fläche umparametrisiert.

<u>Satz 2</u>: Sei $X:\Omega\to\mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\varphi:\tilde\Omega\to\Omega$ eine Umparametrisierung von X. Dann gilt für die Gauß-Abbildung $\tilde N$ von $\tilde X := X\circ\varphi$:

$$\boxed{\tilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = \operatorname{sign}\det D\varphi(\tilde{u},\tilde{v})\; N(\varphi(\tilde{u},\tilde{v}))}\,,\ (\tilde{u},\tilde{v})\in\tilde{\Omega}.$$

<u>Bemerkung:</u> Man nennt φ $\left\{\begin{matrix}\text{orientierungserhaltend}\\ \text{-"- umkehrend}\end{matrix}\right\}$,

falls $\det D\varphi = \left\{\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\right\}$ ist. Der Satz sagt, dass bei Erhalt der Orientierung unter φ die Gauß-Abbildung unverändert bleibt, man muss sie natürlich an der richtigen Stelle auswerten, also $\tilde{N} = N\circ\varphi$ (und nicht $\tilde{N} = N$!).

Beweis: Nach der Kettenregel ist

$$\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \underbrace{DX\Big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}}_{\text{totale Ableitung von } X \text{ an der Stelle } \varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(\partial_{\tilde{u}}\varphi(\tilde{u},\tilde{v})\right)$$

$$= \underbrace{\left(X_u\Big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\quad X_v\Big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\right)}_{\text{Jacobi Matrix}}\begin{pmatrix}\partial_{\tilde{u}}\varphi^1(\tilde{u},\tilde{v})\\ \partial_{\tilde{u}}\varphi^2(\tilde{u},\tilde{v})\end{pmatrix}$$

$$= \partial_{\tilde{u}}\varphi^1(\tilde{u},\tilde{v})\, X_u\Big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} + \partial_{\tilde{u}}\varphi^2(\tilde{u},\tilde{v})\, X_v\Big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})},$$

analog gilt

$$\widetilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \partial_{\tilde{v}}\varphi^1(\tilde{u},\tilde{v})\,X_u\big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} + \partial_{\tilde{v}}\varphi^2(\tilde{u},\tilde{v})\,X_v\big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}.$$

Man bekommt $\widetilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = |\widetilde{X}_{\tilde{u}} \times \widetilde{X}_{\tilde{v}}|^{-1}(\widetilde{X}_{\tilde{u}} \times \widetilde{X}_{\tilde{v}})\,(\tilde{u},\tilde{v})$,

$$\widetilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \widetilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) =$$

$$\left[\partial_{\tilde{u}}\varphi^1(\tilde{u},\tilde{v})\,\partial_{\tilde{v}}\varphi^2(\tilde{u},\tilde{v}) - \partial_{\tilde{u}}\varphi^2(\tilde{u},\tilde{v})\,\partial_{\tilde{v}}\varphi^1(\tilde{u},\tilde{v})\right] X_u \times X_v\big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} =$$

$$\det D\varphi(\tilde{u},\tilde{v})\; N\big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})},$$

also $\widetilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = \operatorname{sign}(\det D\varphi)\; N\big|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}$.

$\square$

§ 2 Erste und Zweite Fundamentalform parametrisierter Flächen

Bevor wir uns mit diesen geometrischen Größen befassen einige Bemerkungen über quadratische Formen: Ist T ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so versteht man unter einer symmetrischen Bilinearform β auf T eine Abbildung $\beta: T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\beta(U,V) = \beta(V,U) \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$\beta(aU + bV, W) = a\,\beta(U,W) + b\,\beta(V,W) \quad \text{(Linearität)}$$

für alle $U, V, W \in T$, $a, b \in \mathbb{R}$. Zu β gehört die quadratische Form $U \mapsto \beta(U,U)$, für die man auch das Symbol $\beta = \beta(U)$ verwendet. β heißt positiv definit, falls

$$0 \neq U \in T \Longrightarrow \beta(U) = \beta(U,U) > 0.$$

Beispiele für symmetrische Bilinearformen, die diese Bedingung erfüllen, sind alle Skalarprodukte, insbesondere auf dem $\mathbb{R}^n$ das Euklidische Skalarprodukt

$$\beta(X,Y) := X\cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Ist $n = \dim T < \infty$, β eine symmetrische Bilinearform auf T, und hat man eine Basis von T gewählt, die aus den Vektoren $e_1,\dots,e_n$ besteht, so gehört zu β bzgl. $(e_1,\dots,e_n)$ die <u>Fundamentalmatrix</u>

$$G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n} \; , \; g_{ij} := \beta(e_i,e_j).$$

Für $U = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ folgt

$$\beta(U,V) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, u_i v_j \; ,$$

d.h. mit G kennt man β. <u>Wie verhält sich die Fundamentalmatrix bei einem Basiswechsel?</u> Sei $\{f_1,\dots,f_n\}$ eine weitere Basis und $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ die Matrix des Basiswechsels, der den Übergang von $\{f_1,\dots,f_n\}$ nach $\{e_1,\dots,e_n\}$ beschreibt, d.h.

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Sei schließlich $F = (f_{kl})_{1 \le k,l \le n}$ die Fundamentalmatrix von β bzgl. $\{f_1, \dots, f_n\}$, $f_{kl} := \beta(f_k, f_l)$.

Dann gilt:

$$g_{ij} = \beta\Big(\sum_{l=1}^{n} a_{il} f_l, \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f_k\Big) =$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{il}\, a_{jk}\, \beta(f_l, f_k) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{il}\, a_{jk}\, f_{lk},$$

anders gesagt: $G = A F A^t$

[Koeff. in Zeile i an Stelle j von $A F A^t$ =

i^{te} Zeile von A^t $\cdot$ $\underbrace{j^{te} \text{ Spalte von } F A^t}_{=:(\xi_{1j} \dots \xi_{nj})}$ =

$a_{il}\, \xi_{lj}$ (mit Summationskonvention)

$= a_{il}$ (l^{te} Zeile von F $\cdot$ j Spalte von A^t)

$= a_{il}\, f_{lk}\, a_{jk} \implies (A F A^t)_{ij} = a_{il}\, f_{lk}\, a_{jk}$]

Wir betrachten noch folgende Situation: Seien S, T $\mathbb{R}$-Vektorräume, $L: S \to T$ sei linear und β_T sei eine symmetrische Bilinearform auf T. Dann gewinnt man daraus eine symmetrische Bilinearform β_S auf S vermöge $\beta_S(U,V) := \beta_T(LU, LV)$, $U, V \in S$.

Man nennt β_S die durch L von β_T induzierte Bilinearform. Ist L injektiv und β_T positiv definit, so auch β_S.

Nun zurück zur Differentialgeometrie:

Definition: 1^{te} Fundamentalform

Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

a) An jeder Stelle $(u,v) \in \Omega$ induziert die Inklusion $T_{(u,v)}X \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ durch das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ eine symmetrische Bilinearform auf $T_{(u,v)}X$, die man die <u>Erste Fundamentalform</u>,

nennt, i.Z.: $I_{(u,v)}$, $g_{(u,v)}$.

<u>Bemerkung:</u> $I_{(u,v)}$ im Sinne von a) ist also einfach nur die Einschränkung des Euklidischen Skalarprodukts auf $T_{(u,v)}X \times T_{(u,v)}X$.

b) Die durch die lineare Abbildung

$$DX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{(u,v)}X$$

und das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ induzierte symmetrische <u>Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$</u> wird <u>ebenfalls</u> <u>Erste Fundamental-form</u> genannt, i.Z. $I_{(u,v)}$, $g_{(u,v)}$.

<u>Was passiert in b)?</u> Man nimmt $U, V \in \mathbb{R}^2$, transportiert diese Vektoren mit $DX_{(u,v)}$ in $T_{(u,v)}X$ und berechnet dann

$$* \quad \tilde{g}_{(u,v)}(U,V) := DX_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V),$$

also das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Links in $*$ haben wir zur Unterscheidung $\tilde{g}$ statt g geschrieben. $\tilde{g}_{(u,v)}$ definiert nun an jeder Stelle $(u,v) \in \Omega$ ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$, und schreiben wir $g_{(u,v)}(DX_{(u,v)}(U), DX_{(u,v)}(V))$ für die rechte Seite von $*$ (vgl. a)), so besteht der Zusammenhang

$$\tilde{g}_{(u,v)}(U,V) = g_{(u,v)}(DX_{(u,v)}(U), DX_{(u,v)}(V)).$$

Nun schreibt man für die linke Seite wieder g statt $\tilde{g}$, also gilt folgende Konvention / Interpretation:

$$U,V \in \mathbb{R}^2 : \quad g_{(u,v)}(U,V) = I_{(u,v)}(U,V) = DX_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V)$$

$$\tilde{U},\tilde{V} \in T_{(u,v)}X : \quad g_{(u,v)}(\tilde{U},\tilde{V}) = I_{(u,v)}(\tilde{U},\tilde{V}) = \tilde{U} \cdot \tilde{V}.$$

Da man in die Bilinearform aus a) Vektoren mit 3 Komponenten einsetzt, in die aus b) dagegen Vektoren